Devoir surveillé de Mathématiques n°1

Exercice 1

Dans le plan complexe :

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points d'affixe z vérifiant l'équation $(1+i)z+(1-i)\overline{z}=2$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points d'affixe z vérifiant l'équation $z+\overline{z}=2z\overline{z}$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points d'affixe z vérifiant l'équation $z^3+\overline{z}=0$.

Exercice 2

Dans le plan complexe, on considère la translation t de vecteur d'affixe $1+2i$ ainsi que la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $2+i$.

1. (a) On appelle z' l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par la translation t.
   Exprimer z' en fonction de z.

   (b) On appelle z' l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par la rotation r.
   Exprimer z' en fonction de z.
2. On appelle $r\circ t$ la transformation qui à un point $M(z)$ associe le point $M''(z'')$ image par la rotation r du point $M'(z')$ image du point M par la translation t.
   Exprimer z'' en fonction de z. Déterminer la nature de la transformation $r\circ t$.
3. On appelle $t\circ r$ la transformation qui à un point $M(z)$ associe le point $M''(z'')$ image par la translation t du point $M'(z')$ image du point M par la rotation r.
   Exprimer z'' en fonction de z. Déterminer la nature de la transformation $t\circ r$.

Exercice 3

On note $q=e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Dans le plan complexe, on considère les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 d'affixes respectives q^0, q^1, q^2, q^3 et q^4 ainsi que les points B et C d'affixes respectives -1 et $\frac{i}{2}$. On notera $\mathcal{D}$ la droite (BC) et $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{2}$. On appelle D et E les points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$.

1. Faire une figure. (on prendra pour unité graphique 8cm)
2. (a) Déterminer une équation réduite de la droite $\mathcal{D}$, en déduire que les affixes z des points de la droite $\mathcal{D}$ vérifient l'équation $(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}=-2$.

   (b) Montrer que les affixes z des points du cercle $\mathcal{C}$ vérifient l'équation $2iz\overline{z}+\overline{z}-z=0$.

   (c) En déduire que les affixes z des points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$ vérifient l'équation $5z^2-5iz-(2+i)=0$.

   (d) Déterminer les affixes des points D et E. (on donnera les affixes sous forme algébrique)
3. (a) Calculer BD^2 et BE^2.

   (b) On admet que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculer ${BA_1}^2$ et ${BA_2}^2$.

   (c) En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \cos(n\theta)$ et $Q_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.

1. (a) Exprimer P_0, P_1 et P_2 en fonction de $X = \cos\theta$.

   (b) Exprimer Q_0, Q_1 et Q_2 en fonction de $X = \cos\theta$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = XP_n + (X^2 - 1)Q_n$ avec $X = \cos\theta$.

   (b) Exprimer Q_{n+1} en fonction de P_n, Q_n et $X = \cos\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire l'expression de P_3 et Q_3 puis P_4 et Q_4 en fonction de $X = \cos\theta$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ avec $X = \cos\theta$.

   (b) Exprimer Q_{n+2} en fonction de Q_{n+1}, Q_n et $X = \cos\theta$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrer qu'en dérivant par rapport à X on a $P'_n = nQ_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.